



Серия №5. Суммы

4 июля

1. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы одного или нескольких различных членов последовательности Фибоначчи, при этом в сумме не должны участвовать соседние члены последовательности Фибоначчи.
2. Дана неубывающая последовательность положительных чисел a_i такая, что каждый ее член (начиная со второго) не превосходит удвоенного предыдущего члена. Докажите, что для любого n в сумме $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можно так выбрать знаки, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq S \leq a_1$.
3. Даны такие натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n , что ни одно из них не превосходит своего номера, а сумма всех их чётна. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы с одинаковой суммой.
4. В каждой вершине правильного 2025-угольника написано целое число. Сумма всех написанных чисел равна 1. Докажите, что можно так выбрать вершину и занумеровать все вершины от нее по порядку по часовой стрелке $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ так, чтобы для любого $k < 2025$ сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ была положительной.
5. Последовательность x_i строится по следующему правилу:
$$x_n = x_{n-1} + \frac{3^{k+1}-1}{2}, \text{ если } n \text{ представимо в виде } 3^k(3m+1),$$
$$x_n = x_{n-1} - \frac{3^{k+1}+1}{2}, \text{ если } n \text{ представимо в виде } 3^k(3m+2),$$
$$x_0 = 0.$$
Докажите, что каждое целое число встретится в последовательности ровно 1 раз.
6. Натуральное число назовём белым, если в его троичной записи используются только цифры 0 или 1, синим – если в его четверичной записи используются только цифры 0 или 1, красным – если в его пятеричной записи используются только цифры 0 или 1. Докажите, что каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы белого, синего и красного числа. Например, $2025 = 3^6 + 3^5 + 3^1 + 4^5 + 1 + 5^2 = 1100010_3 + 100001_4 + 100_5$.
7. Дано натуральное k . Докажите, что любое целое число n может быть представлено в виде алгебраической суммы попарно различных точных k -ых степеней.